DOI: 10.17212/2075-0862-2023-15.1.2-372-387 УДК 51:1

МАТЕМАТИКА: СТАНОВЛЕНИЕ, ОБОСНОВАНИЕ, РАЗРЕШЕНИЕ КРИЗИСА

Розин Вадим Маркович,
доктор философских наук, профессор,
главный научный сотрудник Института философии РАН,
Россия, 109240, г. Москва, ул. Гончарная, 12, стр. 1
ORCID: 0000-0002-4025-2734
rozinvm@gmail.com

Аннотация

В статье обсуждается кризисная ситуация, сложившаяся в настоящее время в математике. Рассматриваются проблемы, позволяющие сделать такой вывод: вопрос о научном статусе математики, возможности ее обоснования, мыслительной или опытной природе математики, времени ее формирования. Автор излагает результаты генезиса геометрии, обобщение которых позволяет утверждать, что математику, с одной стороны, можно считать своего рода эмпирической наукой, с другой – конструктивной научной дисциплиной, в которой на основе исходных идеальных объектов и знаний создаются более сложные идеальные объекты. Рассматриваются два разных понимания обоснования математики – общенаучное и Давида Гильберта. Рассматривается вопрос о том, что собой представляют парадоксы в науке и каким образом они снимаются. Автор склоняется к мнению, что антиномии в математике не могут быть устранены в принципе. Делается вывод о том, что их источником является приписывание объектам математики несогласованных характеристик, что обусловлено самим строением математики. Дело в том, что конструирование идеальных объектов математики протекает под влиянием воздействий, принадлежащих, по меньшей мере, четырем областям: эмпирической области, описывая которую математики создают исходные идеальные объекты и знания; области конструирования на основе исходных, более сложных идеальных объектов; области геометрических доказательств теорем; области построения теории геометрии. Кроме того, рассматривается концепция обоснования математики Д. Гильберта, а также указывается, что существуют разные концепции обоснования математики. В конце статьи обсуждаются особенности современного кризиса математики и возможное направление его разрешения.

Ключевые слова: математика, наука, мышление, знания, теория, доказательства, объекты, противоречия, концепции, обоснование.

Библиографическое описание для цитирования:
Розин В.М. Математика: становление, обоснование, разрешение кризиса // Идеи и идеалы. – 2023. – Т. 15, № 1, ч. 2. – С. 372–387. – DOI: 10.17212/2075-0862-2023-15.1.2-372-387.

1. Проблематизация

Распространенная точка зрения гласит, что идеалом науки выступает математика. Размышляя, на какую науку должна ориентироваться философия его времени, И. Кант указывал именно на математику. «Задача этой критики чистого спекулятивного разума, – пишет он, – состоит в попытке изменить прежний способ исследования в метафизике, а именно совершить в ней полную революцию, следуя примеру геометров и естествоиспытателей <...> если метафизика вступит благодаря этой критике на верный путь науки, то она сможет овладеть всеми отраслями относящихся к ней знаний» [5, с. 91–92].

Существует и прямо противоположная точка зрения: математика – не наука. Вот, например, что говорит профессор Н.Е. Аблесимов: «Наука ли математика? Математика – не наука. Это язык науки. Сошлюсь только на одно высказывание, хотя их можно привести множество: Нильс Бор говорил, что математика – это нечто значительно большее, чем наука, поскольку она является языком науки. Лев Ландау относил ее даже к сверхъестественным наукам» [1].

Не к сверхъестественной, а к гуманитарной науке относил математику известный математик и лингвист В.А. Успенский. «Если математика – часть физики, то с таким же успехом она – часть психологии. Потому что всё происходит в голове у человека. Возьмите такую науку, как теория чисел. Никаких аксиом там нет <...> это свойство человеческой психологии. Некоторые выводят из этого существование Бога. Об этом я не берусь судить, но сам факт такого единства достоин внимания» [14].

Другую проблему сформулировал в книге «Математика: утрата определенности» Морис Клайн: по замыслу математика должна быть непротиворечивой, но в ней время от времени фиксируются противоречия, а дисциплина (основания математики), призванная устранить их, не в состоянии этого сделать раз и навсегда. «Перед математиками, – в начале XX столетия размышляет М. Клайн, – встало несколько трудных проблем. Требовалось устранить уже обнаруженные противоречия. Но еще более важным представлялось доказать непротиворечивость всей математики, ибо без этого нельзя было гарантировать, что в будущем не возникнут новые противоречия <...> Математика достигла ныне той стадии развития, когда вопрос о том, что, собственно, надлежит считать математикой – логицизм, интуиционизм, формализм или теорию множеств, – вызывает ожесточенные споры. <...> Кроме того, как показал Гёдель, в рамках наложенных Гильбертом ограничений любая достаточно мощная формальная система содержит неразрешимые утверждения, т. е. утверждения, которые, базируясь на аксиомах, нельзя ни доказать, ни опровергнуть; но это значит, что подобные утверждения (или их отрицания) можно принять в качестве дополнительных аксиом. Однако и после присоединения новой аксиомы расширенная система, согласно теореме Гёделя, все еще должна содержать неразрешимые утверждения» [6, с. 247, 357–358].

Еще одна сложная проблема – объяснения того, почему математика, которая выглядит продуктом чистой мысли, тем не менее моделирует и описывает реальность, материальные процессы природы. «Почему, – спрашивает М. Клайн, – математика эффективна там, где мы располагаем лишь непроверенными гипотезами о сущности физических явлений и где при описании этих явлений вынуждены почти целиком полагаться на одну математику? <...> Этот вопрос интересовал и продолжает интересовать многих. Неоднократно задавал его себе и Альберт Эйнштейн в книге "Вокруг теории относительности" (1921): "В этой связи возникает вопрос, который волновал исследователей всех времен. Почему возможно такое превосходное соответствие математики с реальными предметами, если сама она является произведением только человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом? Может ли человеческий разум без всякого опыта, путем только одного размышления понять свойства реальных вещей?"» [6, с. 391–392].

Вероятно, Платон подтвердил бы этот взгляд на математику, поскольку считал, что математические объекты по своему строению приближаются к идеям (если боги могут созерцать идеи, то человек – только их «прообразы», геометрические фигуры и числа [10, с. 433]. Но Аристотель, считая математические знания абстракциями природных начал, решительно возразил бы. «После того как нами определено, – пишет Стагирит, – в скольких значениях употребляется слово "природа", следует рассмотреть, чем отличается математик от физика. Ибо природные тела имеют и поверхности, объемы, и протяжение в длину, и точки, изучением которых занимается математик <...> он и производит абстракцию, ибо мысленно фигуры можно отделить от движения <...> геометрия рассматривает физическую линию, но не поскольку она существует физически, а оптика – математическую линию, но не как математическую, а как физическую. А так как природа двояка, она есть форма и материя, то <...> подобные предметы нельзя брать ни без материи, ни с одной материальной стороны» [2, с. 25–26]. С точки зрения Платона, поскольку математические объекты сходны с идеями, они действительно должны быть непротиворечивыми – ведь идеи непротиворечивы. По мнению Аристотеля, математические построения (формы) непротиворечивы, но не потому, что они близки к идеям, а потому, что природные процессы (движения) задаются Разумом (божеством), который не может мыслить противоречиво. По Платону («Тимей»), именно математика конституирует природу (космос); по Аристотелю, математика – всего лишь знание о форме природы.

Еще одна проблема – противоположные мнения об историческом времени становления математики. Одни историки математики, например О. Нейгебауэр и А. Вайман, настаивают на том, что математика была уже в глубокой древности. Характерны названия их книг: «Шумеро-вавилонская математика» (А. Вайман), «Точные науки в древности» (О. Нейгебауер); причем и математику, и научную астрономию, утверждает последний, создали те же шумеры. Другие (скажем, Б. ван дер Варден в книге «Пробуждающаяся наука» да и многие другие историки науки) показывают, что математика («Начала» Евклида, работы Пифагора, Архимеда, Аполлония, Диофанта) сложилась только в античной культуре. Однако сторонники концепции, по которой идеалом науки выступает естествознание, которое сложилось в Новое время, уверены, что, например, «Начала» Евклида – это преднаучное состояние математики, а математика как строгая наука сложилась только в XV–XVII столетиях.

Ограничусь указанными проблемами, ведь список проблем, как известно, всегда открытый. Пока можно сделать такой вывод: современная математика, особенно в плане концептуализации, переживает кризис, поэтому-то М. Клайн в названии своей книги и употребил выражение «утрата определенности». Этот кризис требует разрешения. Опыт автора показывает, что такая работа предполагает реализацию методологического и культурологического подходов. Поскольку автор является специалистом в методологии и культурологии, обсуждение того, как можно разрешить этот кризис, относится к его компетенции.

2. Математика как эмпирическая наука и конструирование идеальных объектов

Исследования «Начал» Евклида, а это, по общему мнению, первая в истории сознательно построенная математика, показали, что первые две книги «Начал» (всего их 15) могут быть соотнесены со способами решения шумеро-вавилонских задач на вычисление и преобразование площадей полей. Эти способы были разработаны примерно за две тысячи лет до античной культуры, их описали историки математики, когда удалось расшифровать глиняные библиотеки, раскопанные в развалинах царей древней Ассирии. Остальные книги

«Начал» содержали математические знания, не связанные с деятельностью шумерских писцов. Содержание первых двух книг «Начал» коррелирует с легендой, по которой геометрия возникла из потребностей земледелия. Например, Геродот писал, что «Сезострит, египетский царь, произвел деление земель, отмерив каждому египтянину участок по жребию, и сообразно этим участкам с их владельцев ежегодно взимал налоги. Если Нил заливал чей-нибудь участок, то пострадавший обращался к царю и докладывал о случившемся. Тогда царь посылал землемеров (геометров), они измеряли, на сколько уменьшился участок, и сообразно этому понижали налог. Вот откуда пришла геометрия и перешла из этой страны в Грецию» [4].

А вот что показывает научный анализ [12, с. 139–215; 13, с. 206–224]. Разливы рек каждый год смывали границы полей (они обозначались грядой камней), в связи с чем, действительно, поля нужно было восстанавливать, причем, как правило, той же площади. Помимо процедуры восстановления (для этого, например, в прямоугольном поле, которых было большинство, отмерялась длина поля и перпендикулярно к ней – его ширина), с полями совершали еще ряд действий. Их сравнивали по величине, делили на части, соединяли между собой, по одним элементам (например, известным площадям или сторонам поля) определяли другие. Все эти действия совершались, во-первых, с помощью чисел, фиксирующих площади полей или их части, величины сторон поля, линий раздела; во-вторых, планов полей, представленных в чертежах. В глиняных книгах и папирусах Древнего Египта сохранились чертежи сотен восстанавливаемых полей, а также чертежи отдельных полей в задачах по вычислению площадей или определению неизвестных элементов с использованием известных.

Таким образом, сложились два слоя: деятельность с полями (восстановление их, деление на части и пр.) и деятельность с *моделями* полей, фиксируемых с помощью чисел и чертежей (вычисление площадей, сравнение по величине, решение задач на определение одних элементов, если известны другие). Модели должны были пониматься двояко: как «объекты оперирования» в вычислениях и решениях задач и как «схемы», когда их относили к полям. Впрочем, эта оппозиция принадлежит современному исследователю; трудно сказать, как она осознавалась древними писцами. В качестве объектов оперирования моделям приписывались такие свойства, как наличие *площади*, имеющей определенную величину, *формы* (различались поля «прямые», «косые» и поля в виде «лба быка», т. е., с нашей точки зрения, поля прямоугольные, треугольные и трапецеидальные), определенное *строение* (например, в чертежах полей выделялись стороны, составные части, имеющие определенную форму, и др.).

Вот простой пример. Типичной задачей была следующая. Условие: «поле прямое 60 гар (гар – мера площади. – *В. Р.*) разбили на два косых. Узнай косые поля». Решение: «разломи 60 пополам, получишь 30. Поля 30».

Через две тысячи лет пифагорейцы познакомились с текстами решений подобных задач, причем вавилонские писцы уже не могли объяснить, как были получены способы решения этих задач: традиция изобретения этих способов была утеряна, просто воспроизводились решения задач. Пифагорейцы были вынуждены сами осмыслять эти тексты. При этом они считали, что мир создали боги, и объекты их творения не простые вещи, а сакральные сущности. Точно так же они смотрели на числа и чертежи в шумеро-вавилонских задачах: это сакральные объекты, и так их и надо понимать. Но как это сделать? Помогла процедура наложения: пифагорейцы представили, что одни сакральные объекты правильной формы накладывались на другие. Например, в приведенной задаче на прямоугольный объект (его стали называть геометрической фигурой) были наложены два треугольных (два треугольника).

Иначе говоря, с одной стороны, были введены новые объекты – геометрические фигуры, которые понимались как самостоятельные сущности (вначале – как сакральные); в результате геометрические чертежи в решениях задач были оторваны от полей. С другой – геометрическим фигурам приписывались свойства (равенства и неравенства), взятые из решений шумеро-вавилонских задач, отражавшие свойства полей и действий с ними. Например, отталкиваясь от приведенной задачи, пифагорейцы могли сформулировать положение, что два треугольника, полученные в прямоугольнике с помощью деления по диагонали, равны по площади этому прямоугольнику.

На рассмотренный здесь процесс понимания можно посмотреть, в частности, как на интерпретацию в новом геометрическом языке текстов шумеро-вавилонских и древнеегипетских задач. Такой подход объясняет появление положений многих теорем первых двух книг «Начал» Евклида: они были получены за счет переинтерпретации пифагорейскими математиками указанных текстов. Но откуда были взяты положения других книг?

Можно предположить, что они были получены за счет конструктивной работы. Дело в том, что геометрические фигуры уже как сакральные объекты чертились на песке и даже изображались с помощью вещественных моделей. Например, еще Архимед, чтобы убедиться в равенствах или неравенствах при наложении одних фигур на другие, пользовался этим методом, изготовляя модели геометрических фигур и взвешивая их. Желая понять, каким образом боги создали мир со всем многообразием его объектов, пифагорейцы стали на основе одних геометрических фигур создавать другие: из более простых складывать более сложные, сложные преобразовывать в более простые. Но не противоречило ли это сакральной природе геометрических объектов? Думаю, нет. Античные люди понимали действия богов иначе, чем мы: боги, конечно, боги, но они очень похожи на людей, особенно в плане практической деятельности.

Итак, если источник исходных геометрических знаний – интерпретация в новом языке шумеро-вавилонских и древнеегипетских способов решения задач, то источник всех остальных геометрических знаний и объектов – конструктивная деятельность. В языке философии науки можно сказать и так: у геометрии два основных источника новых объектов и знаний – определенная эмпирическая область и конструирование.

Параллельно на указанные здесь два процесса наложился еще один. Возможно, с подачи Платона, как известно, общавшегося с пифагорейцами, последние стали не просто рассуждать о геометрических фигурах, но стремиться рассуждать без противоречий. Для этого они, следуя за Сократом и Платоном, стали определять свойства геометрических фигур и придерживаться в рассуждениях этих определений. Установка на непротиворечивость вскоре была дополнена требованием *доказательства* геометрических знаний, что тоже, вероятно, шло от Платона, который настаивал на том, что условием доступа к идеям (их припоминания) является диалектика, включающая в себя именования, определения, построения схем, доброжелательные обсуждения.

Платон пишет: «Для каждого из существующих предметов есть три ступени, с помощью которых необходимо образуется его познание; четвертая ступень – это само знание, пятой же дóлжно считать то, что познается само по себе и есть подлинное бытие: итак, первое – это имя, второе – определение, третье – изображение, четвертое – знание <...> Все это нужно считать чем-то единым, так как это существует не в звуках и не в телесных формах, но в душах <...> Лишь с огромным трудом, путем взаимной проверки – имени определением, видимых образов – ощущениями, да к тому же, если это совершается в форме доброжелательного исследования, с помощью беззлобных вопросов и ответов, может просиять разум и родиться понимание каждого предмета в той степени, в какой это доступно для человека» [11, с. 493, 494, 496].

Это был третий контекст, в котором рождалась геометрия и ее объекты. Всего их было четыре. Первый – контекст решения шумеро-вавилонских и древнеегипетских задач по поводу земледелия. Второй – герменевтический: понимание греками текстов этих задач, в процессе которого построение геометрических фигур было оторвано от задач земледелия, но в то же время были ассимилированы свойства и отношения объектов оперирования и моделей, созданных в этих задачах. Третий контекст – построение греческого мышления, с требованиями непротиворечивости и доказательности знаний.

Четвертый контекст задавала аристотелевская программа построения науки. Наука должна изучать движения, происходящие «по природе», причем, как выше отмечалось, построение форм (математики) было необходимым условием подобного изучения. В этом последнем контексте в эллинистический период геометрические фигуры превращаются в идеальные объекты античной науки геометрии, а сама геометрия в «Началах» Евклида – в науку и образец для всей математики.

Хотя другие виды математики существенно отличаются от геометрии, у всех математик два источника новых объектов и знаний: один – определенная эмпирическая область, другой – конструирование математической онтологии. Учитывая это обстоятельство, любую математику можно охарактеризовать двояко: с одной стороны, она представляет собой *эмпирическую науку*, с другой – *конструктивную теорию*. Например, Ньютон стал исследовать движение планет в поле тяготения. При этом пришел к выводу, что существующая геометрия не может помочь в решении этой задачи, нужна другая математика. В качестве эмпирической области знаний для новой математики он взял теорию движения Галилея. «Я, – пишет Ньютон, – рассматриваю здесь математические количества не как состоящие из очень малых частей, а как производимые непрерывным движением. Линии описываются и по мере описания образуются не приложением частей, а непрерывным движением точек, поверхности – движением линий, объемы – движением поверхностей, углы – вращением сторон, времена – непрерывным течением» (цит. по [7, с. 197]).

Здесь же Ньютон дает новое определение математической величины, приписывая ей параметры времени, скорости и пути. Интересно понятие «соотнесенной величины» (“quantitas”) ... посредством равномерного роста или течения которой выражается и измеряется время» [7, с. 198]. На ее основе Ньютон задает новые математические объекты – «флюенты» и «флюксии»: «Постоянно и неопределенно возрастающие величины называются флюентами, их бесконечно малые приращения суть моменты, между тем как их скорости суть флюксии, с которыми «возрастают вследствие порождающего их движения флюенты» [7, с. 199]. Дальше на основе этих идеальных объектов Ньютон конструктивным путем создает более сложные объекты своей теории.

3. Обоснование математики

Вероятно, стоит различать два разных понимания обоснования: одно можно назвать «общенаучным», автором другого является Давид Гильберт. Общенаучное обоснование – это один из центральных принципов науки, понимаемый как требование строгости и непротиворечивости научных построений, причем понимание этого требования менялось в разные эпохи.

Вот один пример: становление в Новое время естествознания. «Здание этого нашего Мира, – пишет Бэкон, – и его строй представляют собой некий лабиринт для созерцающего его человеческого разума, который встречает здесь повсюду столько запутанных дорог, столь обманчивые подобия вещей и знаков, столь извилистые и сложные петли и узлы природы <...> Надо направить наши шаги путеводной нитью и по определенному правилу обезопасить всю дорогу, начиная от первых восприятий чувств <...> но, прежде чем удастся причалить к более удаленному и сокровенному в природе, необходимо ввести лучшее и более совершенное употребление человеческого духа и разума <...> путь к этому нам открыло не какое-либо иное средство, как только справедливое и законное принижение человеческого духа» [3, с. 68, 69].

«Программа Гильберта, – пишет Н.М. Нагорный, – в главных чертах изложенная в докладе "О бесконечном", предусматривала, во-первых, аксиоматизацию всех без исключения математических теорий (в том числе и множеств теорий); во-вторых, установление непротиворечивости всех полученных аксиоматик и, в-третьих, дальнейшее развитие построенных теорий на чисто дедуктивной основе с использованием аристотелевской логики. При таком подходе и аксиомы, и утверждения конкретной теории описывались Гильбертом простыми и наглядными средствами – конструктивными объектами, имеющими точную синтаксическую структуру. Формализация логики открывала возможность придать аналогичный прозрачный, чисто синтаксический характер и самому понятию математического доказательства, а непротиворечивость теории трактовалась как невозможность одновременного получения в ней доказательств двух таких утверждений, что одно из них является отрицанием другого <…>

При всей на первый взгляд перспективности программы Гильберта ее реализация уже с первых шагов столкнулась с непредвиденными трудностями. Первый серьезный урон был нанесен ей открытием К. Гёделя, показавшего (1931), что неполна (и даже принципиально непополнима!) любая непротиворечивая аксиоматизация уже элементарной арифметики натуральных чисел. Между тем, по замыслу Гильберта, именно она, "это чистейшее, – по его выражению, – и наивнейшее дитя человеческого духа", должна была первой пройти "проверку на непротиворечивость" <…> на своем "главном направлении" гильбертовская теория доказательств потерпела поражение (возможно, впрочем, ее постигла общая судьба всех слишком общих программ), но зато она принесла обильные плоды на ее "периферии", составившие целую эпоху в области оснований математики» [8, с. 523].

Возникает вопрос, возможно ли в принципе реализовать программу обоснования математики в духе Д. Гильберта, т. е. сделать математику раз и навсегда непротиворечивой? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала, почему вообще в математике (и, более широко, в науке вообще) возникают противоречия, и как их можно преодолевать. В общем виде на эти два вопроса можно ответить таким образом. Объекты научной теории (именно там возникают противоречия) – это «идеальные объекты», их создает ученый, приписывая изучаемому явлению фиксированные характеристики (свойства), причем таким образом, чтобы можно было получать непротиворечивые знания, решить поставленные проблемы, осмыслить эмпирический материал (факты) [13, с. 84]. Противоречия в науке возникают потому, что идеальным объектам ученый приписывает несогласованные между собой свойства, что рано или поздно обнаруживается в ходе научных построений, рассуждений, доказательств. Снимаются противоречия (это показал уже Аристотель, а в наше время Имре Лакатос в книге «Доказательства и опровержения») за счет перестройки и согласования идеальных объектов.

Например, в «Физике» Стагирит разбирает парадокс Зенона о том, что нельзя пройти любое расстояние, поскольку оно представляет собой континуум, который делится до бесконечности, и так как для прохождения любого сколь-нибудь малого отрезка пути необходимо время, получается бесконечное время, а в бесконечное время ничто пройдено быть не может. Аристотель показывает, что Зенон строит такое понятие времени (с современной точки зрения – задает идеальный объект), которое не согласовано с понятием пути (путь изображается отрезком, который делится до бесконечности, а время – натуральным рядом чисел). Чтобы снять парадокс Зенона, Стагирит предлагает перестроить понятие времени, согласовав его с понятием пути. Конкретно – представить время как континуум, изображать его в отрезках и делить до бесконечности. В этом случае, утверждает Аристотель, бесконечность пути будет соответствовать бесконечности времени и расстояние будет проходимым. «И вот, бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению – возможно, так как само время в этом смысле бесконечно. Следовательно, приходится проходить бесконечность в бесконечное, а не в ограниченное время, и касаться бесконечного множества частей бесконечным, а не ограниченным множеством. Конечно, невозможно ни пройти бесконечного в конечное время, ни конечного в бесконечное время, но если время будет бесконечным, то и величина будет бесконечной, если величина, то и время» [2, с. 107].

Разберем еще одну апорию, математическую, ее обосновал Галилей еще в XVII столетии. С одной стороны, очевидно, что четных чисел меньше, чем чисел натурального ряда, ведь не все числа четные. С другой стороны, каждому числу натурального ряда можно поставить в соответствие четное число:

1 **2** **3** **4** **5** **6**… до бесконечности
2 **4** **6** **8** **10** **12**… до бесконечности.

То есть если речь идет о бесконечности, то четных чисел оказывается столько же, сколько натуральных.

Как определяется четное число? Оно делится без остатка на два. Последуем примеру Аристотеля: переопределим четное число таким образом, чтобы парадокс исчез. Будем называть четными числами такие, которые, во-первых, делятся на два, во-вторых, занимая место в натуральном ряду чисел, перестают быть четными (точнее, мы лишаемся оптики, позволяющей увидеть за натуральным числом, четное оно или нет). При таком определении четного числа бесконечный ряд четных чисел, поставленных в соответствие бесконечному ряду натуральных чисел, всё равно будет меньше этого ряда натуральных чисел, поскольку, входя в бесконечный ряд натуральных чисел, четные числа становятся обычными, которых значительно меньше, чем чисел натурального ряда. Что я сделал? Построил новый идеальный объект, приписав четному числу дополнительное свойство.

Подумаем теперь, каким образом математик конструирует идеальные объекты. Из того, о чем мы говорили выше, следует, что конструирование идеальных объектов математики протекает под влиянием воздействий, принадлежащих, по меньшей мере, четырем областям. Эмпирической области, описывая которую математики создают исходные идеальные объекты и знания (например, геометрические фигуры и отношения равенства в первых двух книгах «Начал» Евклида). Области конструирования на основе исходных, более сложных идеальных объектов (фигуры теорем остальных книг «Начал»). Области геометрических доказательств теорем, удовлетворяющих требованиям аристотелевской логики. Области построения теории (для геометрии – «Начала» Евклида), следуя за Аристотелем или более поздними концепциями математики как науки.

К этому списку нужно добавить и концепцию обоснования математики Д. Гильберта, ведь она тоже задает принципы конструирования идеальных объектов математики. Но если учесть, что существуют разные концепции обоснования математики (главные – логицизм, интуиционизм, формализм, теория множеств), то число областей, определяющих, но по-разному, конструирование математических идеальных объектов, возрастет.

Математики в каждой из указанных областей приписывают своим идеальным объектам определенные характеристики, как правило, не согласовывая их с характеристиками таких объектов из других областей или учитывая такие характеристики только частично. Единство математики и обмен полученными результатами рано или поздно приводит к тому, что несогласованные характеристики идеальных объектов математики встречаются и сталкиваются, что и осознается (артикулируется) в форме парадоксов. В результате начинается работа по перестройке идеальных объектов математики, т. е. действие одного из вариантов обоснования математики.

Но можно ли ее выполнить заранее и раз и навсегда, к чему призывают сторонники Д. Гильберта? Можно, если остановить развитие математики и свести ее только к одному варианту. «Основной вывод, который можно сделать из существования нескольких противоборствующих подходов к математике, – размышляет М. Клайн, – состоит в следующем: имеется не одна, а много математик. О математике в целом, по-видимому, правильнее говорить во множественном числе (как о многих математиках), оставив единственное число для обозначения любого из подходов. Философ Джордж Сантаяна как-то сказал: "Не существует Бога, и дева Мария – матерь Его". Перефразируя эти слова, можно сказать: "Не существует единой, общепринятой математики, и греки – создатели ее"» [6, с. 358].

Очарование гильбертовской программы обоснования математики сообразно сомнительному любованию красотой посмертной маски умершего. Живая математика развивается в том числе через противоречия и их преодоление. Тем не менее из факта неудачи программы Гильберта не следует, что она оказалась бесполезной. Да, предложенная, например, в его «Основаниях геометрии» аксиоматика не смогла заменить геометрию Евклида и сделать геометрию непротиворечивой, зато позволила промоделировать поле геометрии. На основе этой модели Гильберт доказал, что его система аксиом непротиворечива, если непротиворечива теория действительных чисел, что большинство введенных им аксиом независимы. Рассмотрел он также вопрос, как далеко можно развить геометрию, если класть в ее основание те или иные группы аксиом. Математические построения и теории а-ля Гильберт очень не похожи на математику, это скорее *метаязыки математики и модели*, с помощью которых в определенном ракурсе исследуются уже созданные математики и проектируются новые.

4. Природа кризиса современной математики

Дело не в противоречиях, а в неадекватном осознании математики и в некоторых особенностях научной коммуникации. Если считать, как многие, что математика является «произведением человеческой мысли, не связанной ни с каким опытом», то да, тогда творчество математиков выглядит загадочно и даже мистически. Но, как я старался показать, математика не только конструирование, но также эмпирическая наука. И в рамках конструирования своих идеальных объектов она следует за исходными идеальными объектами и знаниями, полученными в ходе описания определенных эмпирических предметных областей. Конечно, как показал И. Лакатос, в ходе конструирования математик может сильно отклониться от исходных построений, приписав объектам математики новые свойства, обусловленные уже не исходными началами, а соображениями логики и строгости доказательства [9, с. 152]. Таким образом, кстати, была построена геометрия Лобачевского, который хотел всего лишь доказать от обратного пятый постулат евклидовой геометрии. Другое рассмотренное выше заблуждение заключается в том, что можно построить непротиворечивую математику. Третье заблуждение заключается в том, что математика – единая научная дисциплина. Нет, в настоящее время она распалась на множество математик с разными формами осознания (концептуализации).

На заре становления математики как науки, в эллинистический период, коммуникация была очень простой: как видно из письма Архимеда к Эратосфену («Метод»), небольшая группа математиков просто обменивалась результатами своих изысканий, при этом им было легко выработать согласованные представления о самой математике. В современной науке налицо много разных школ и направлений математики, между ними идет полемика и борьба за финансирование. В результате согласованные представления о математике стали невозможными. Вот всего лишь один небольшой пример. «Споры вокруг аксиомы выбора, – пишет М. Клайн, – по существу сводились к одной главной проблеме: как следует понимать существование в математике? Одни математики склонны считать “существующим” любое понятие, оказавшееся полезным, если оно не приводит к противоречиям, например, обычную замкнутую поверхность, площадь которой бесконечна. Для других математиков “существование” означает четко распознаваемое определение, или такое понятие, которое позволяет отождествить или, по крайней мере, описать его. Одной лишь возможности выбора недостаточно. В дальнейшем эти взаимоисключающие точки зрения стали еще более непримиримыми» [6, с. 246].

Кризис математики связан не с противоречиями, их всегда удается разрешить, а с новым статусом математики как новоевропейского социального института модерна. Рыночная конкуренция и поддержка научных исследований государством обусловили формирование разных научных сообществ и такую коммуникацию между ними, которая способствует дифференциации направлений внутри отдельных наук, в том числе и в математике. Конечно, на съездах и в научных публикациях вырабатываются общие взгляды на математику (и другие науки), но тенденции к обособлению научных сообществ и культивируемого в них мышления более сильны, чем противоположные к объединению.

Не должны ли мы в таком случае предположить, что математика в своем развитии подошла к такому этапу, когда дальнейшее ее существование как науки становится невозможным без адекватного осознания причин, приведших к кризису. Необходимы реформы. Они должны быть направлены, с одной стороны, на выработку нового понимания самой математики, с другой – на переформирование научного сообщества и коммуникации, позволяющих сближать разные взгляды на математику.

Литература

1. *Аблесимов Е.Н.* Математика – не наука // Дзен. – 2019. – 5 ноября. – URL: https://zen.yandex.ru/media/unpopularopinion/matematika-ne-nauka-5dc12838ddfef600af7b9c0b (дата обращения: 01.03.2023).

2. *Аристотель.* Физика. – М.: Соцэкгиз, 1936. – 188 с.

3. *Бэкон Ф.* Великое восстановление наук // Бэкон Ф. Сочинения: в 2 т. Т. 1. – М.: Мысль, 1971. – 590 с.

4. *Маркова К.* Возникновение геометрии // Pandia: сайт. – URL: https://pandia.ru/text/77/382/36249.php (дата обращения: 01.03.2023).

5. *Кант И.* Сочинения. В 6 т. Т. 3. Критика чистого разума. – М.: Мысль, 1964. – 799 с.

6. *Клайн М.* Математика. Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 423 с.

7. *Кудрявцев П.С.* История физики. Т. 1. – М.: Учпедгиз, 1948. – 536 с.

8. *Нагорный Н.М.* Гильберт // Новая философская энциклопедия. – М., 2000. – С. 523.

9. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. – М.: Наука, 1967. – 152 с.

10. *Платон.* Тимей // Платон. Собрание сочинений. В 4 т. Т. 3. – М.: Мысль, 1994. – С. 421–501.

11. *Платон.* Седьмое письмо // Платон. Собрание сочинений. В 4 т. Т. 4. – М.: Мысль, 1994. – С. 475–504.

12. *Розин В.М.* Логико-семиотический анализ знаковых средств геометрии (к построению учебного предмета) // Педагогика и логика / Г. Щедровицкий, В. Розин, Н. Алексеев, Н. Непомнящая. – М.: Касталь, 1993. – С. 139–215.

13. *Розин В.М.* Наука: происхождение, развитие, типология, новая концептуализация. – М.: МПСИ; Воронеж: МОДЭК, 2008. – 600 с.

14. *Успенский В.А.* Математика – это гуманитарная наука // Троицкий вариант – Наука. – 2014. – 28 января (№ 2 (146)). – С. 4–6. – URL: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432214/ (дата обращения: 01.03.2023).

Статья поступила в редакцию 10.10.2021.
Статья прошла рецензирование 11.12.2021.

DOI: 10.17212/2075-0862-2023-15.1.2-372-387

MATHEMATICS: FORMATION, SUBSTANTIATION, RESOLUTION OF THE CRISIS

Rozin, Vadim,
Dr. of Sc. (Philosophy), Professor,
Chief Researcher, Institute of Philosophy RAS,
1 bldg, 12 Goncharnaya Street, Moscow, 109240, Russian Federation
ORCID: 0000-0002-4025-2734
rozinvm@gmail.com

Abstract

The article discusses the current situation in mathematics, which is interpreted as a crisis. The problems that allow making such a conclusion are considered: the question of the scientific status of mathematics, the possibility of its substantiation, the mental or experimental nature of mathematics, the time of its formation. The author presents the results of the genesis of geometry, the generalization of which makes it possible to assert that mathematics, on the one hand, can be considered a kind of empirical science, on the other, a constructive scientific discipline, in which more complex ideal objects are created on the basis of initial ideal objects and knowledge. Two different understandings of the foundations of mathematics are considered – general scientific and David Hilbert's, as well as what paradoxes are in science and how they are removed. The author is inclined to believe that antinomies in mathematics cannot be eliminated once and for all, their source is attributing inconsistent characteristics to objects of mathematics, which is due to the very structure of mathematics. The fact is that the construction of ideal objects of mathematics proceeds under the influence of at least four areas: the empirical area, describing which mathematicians create initial ideal objects and knowledge; areas of design based on the original more complex ideal objects; areas of geometric theorem proofs; area of construction of the theory of geometry. In addition, here it is necessary to add the concept of the foundation of mathematics by D. Hilbert, and also take into account that there are different concepts of the foundation of mathematics. At the end of the article, the features of the current crisis in mathematics and the possible direction of its resolution are discussed.

Keywords: mathematics, science, thinking, knowledge, theory, proofs, objects, contradictions, concepts, substantiation.

Bibliographic description for citation:
Rozin V. Mathematics: Formation, Substantiation, Resolution of the Crisis. *Idei i idealy = Ideas and Ideals*, 2023, vol. 15, iss. 1, pt. 2, pp. 372–387. DOI: 10.17212/2075-0862-2023-15.1.2-372-387.

References

1. Ablesimov E.N. Matematika – ne nauka [Mathematics is not a science]. *Dzen*, 2019, 5 November. (In Russian). Available at: https://zen.yandex.ru/media/unpopularopinion/matematika-ne-nauka-5dc12838ddfef600af7b9c0b (accessed 01.03.2023).

2. Aristotle. *Fizika* [Physics]. Moscow, Sotsekgiz Publ., 1936. 188 p. (In Russian).

3. Bacon F. *Velikoe vosstanovlenie nauk* [The Great Restoration of Sciences]. Bacon F. *Sochineniya*. V 2 t. T. 1 [Works. In 2 vol. Vol. 1]. Moscow, Mysl' Publ., 1971. 590 p. (In Russian).

4. Markova K. Vozniknovenie geometrii [The emergence of geometry]. *Pandia*: website. (In Russian). Available at: https://pandia.ru/text/77/382/36249.php (accessed 01.03.2023).

5. Kant I. *Sochineniya*. V 6 t. T. 3. Kritika chistogo razuma [Works. In 6 vol. Vol. 3. Critique of Pure Reason]. Moscow, Mysl' Publ., 1964. 799 p. (In Russian).

6. Kline M. *Mathematics: The Loss of Certainty*. Oxford University Press, 1980 Russ. ed.: Klain M. *Matematika. Utrata opredelennosti*. Moscow, Mir Publ., 1984. 423 p.).

7. Kudryavtsev P.S. *Istoriya fiziki*. T. 1 [History of Physics. Vol. 1]. Moscow, Uchpedgiz Publ., 1948. 536 p.

8. Nagornyi N.M. Gil'bert [Hilbert]. *Novaya filosofskaya entsiklopediya* [New Philosophical Encyclopedia]. Moscow, 2000, p. 523.

9. Lakatos I. *Dokazatel'stva i oproverzheniya* [Evidence and refutation]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 152 p. (In Russian).

10. Plato. Timei [Timaeus]. Plato. *Sobranie sochinenii*. V 4 t. T. 3 [Complete Works. In 4 vol. Vol. 3]. Moscow, Mysl' Publ., 1994, pp. 421–501. (In Russian).

11. Plato. *Sed'moe pis'mo* [Seventh letter]. Plato. *Sobranie sochinenii*. V 4 t. T. 4 [Complete Works. In 4 vol. Vol. 4]. Moscow, Mysl' Publ., 1994, pp. 475–504. (In Russian).

12. Rozin V.M. Logiko-semioticheskii analiz znakovykh sredstv geometrii (k postroeniyu uchebnogo predmeta) [Logical-semiotic analysis of the symbolic means of geometry (to the construction of a school subject)]. *Pedagogika i logika* [Pedagogy and Logic]. Moscow, Kastal' Publ., 1993, pp. 139–215.

13. Rozin V.M. *Nauka: proiskhozhdenie, razvitie, tipologiya, novaya kontseptualizatsiya* [Science: origin, development, typology, new conceptualization]. Moscow, MPSI Publ., Voronezh, MODEK Publ., 2008. 600 p.

14. Uspenskii V.A. Matematika – eto gumanitarnaya nauka [Mathematics is a humanitarian science]. *Troitskii variant – Nauka*, 2014, 28 January (no. 2 (146)), pp. 4–6. (In Russian). Available at: https://elementy.ru/nauchno-populyarnaya_biblioteka/432214/ (accessed 01.03.2023).

The article was received on 10.10.2021.
The article was reviewed on 11.12.2021.