

## Количественный анализ финансовых инструментов на основе портфельной теории и теории игр

**Власов Дмитрий Анатольевич,**

*кандидат педагогических наук, доцент,*

*доцент кафедры математических методов в экономике*

*Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова,*

*Россия, 117997, г. Москва, Стремянный пер., 38;*

*доцент департамента математики*

*Финансового университета при Правительстве РФ,*

*Россия, 125167, г. Москва, Ленинградский пр., 49;*

*доцент кафедры математического моделирования и информационных технологий*

*Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы,*

*Россия, 117198, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

ORCID: 0000-0001-9763-9078

DAV495@gmail.com

### Аннотация

В центре внимания статьи – современные приемы количественного анализа финансовых инструментов на основе портфельной теории Марковица, позволяющей конструировать оптимальные портфели финансовых инструментов в предположении о крайней рациональности инвесторов и теории игр, позволяющей учесть фактор взаимодействия игроков – участников финансовых рынков. Актуальность темы исследования обусловлена потребностью в повышении качества принимаемых финансовых решений в условиях повышенной волатильности финансовых рынков. Построено исходное множество финансовых инструментов, состоящее из пятидесяти элементов – альтернативных вариантов размещения денежных средств. Предварительный анализ исходного множества финансовых инструментов позволил сузить его до десяти элементов, наиболее предпочтительных для размещения денежных средств. Классическая модель портфеля Марковица, предполагающая максимизацию ожидаемой доходности портфеля при заданном уровне риска, дополнена вспомогательными ограничениями, позволяющими учесть индивидуальные предпочтения инвесторов. Представленные шесть модификаций портфелей Марковица способствуют выявлению динамики количественных характеристик портфелей в зависимости от индивидуальных предпочтений инвесторов. В качестве количественных характеристик портфелей приняты ожидаемая доходность и ожидаемый риск, оцененные по реальным финансовым данным. Построенная игровая модель имеет вид игры с природой, позволяющей учесть сложный характер взаимодействия игроков, в большинстве случаев

не характеризующийся антагонизмом. Игровая модель построена для выбора оптимальной чистой стратегии инвестора, в рамках которой учитываются различные состояния финансового рынка, выражаемые рыночным индексом (рыночным портфелем). Исследование игровой модели реализовано на основе интегрированного критерия Ходжа–Лемана относительно доходности и риска. Его использование позволило учесть индивидуальный уровень доверия инвестора к имеющейся финансовой информации. В процессе практической реализации указанных приемов получены результаты, позволяющие сделать вывод о степени чувствительности оптимальных стратегий инвестирования к индивидуальным предпочтениям и представлениям инвесторов. Построенные модели могут быть использованы для обновления содержания профессиональной подготовки студентов в системе высшего экономического образования, а также для постановки курсов дополнительного профессионального образования.

**Ключевые слова:** портфельная теория, теория игр, критерий Ходжа–Лемана, портфель Марковица, индивидуальные предпочтения инвестора, количественный анализ, финансовые решения, оптимальная стратегия.

## Quantitative Analysis of Financial Instruments Based on Portfolio Theory and Game Theory

**Dmitry Vlasov,**

*Cand. Sc. (Pedagogical Sciences), Associate Professor,  
Associate Professor, Department of Mathematical Methods in Economics  
Plekhanov Russian University of Economics,  
38 Stremyanny Street, Moscow, 117997, Russian Federation;  
Associate Professor of the Department of Mathematics  
Financial University under the Government of the Russian Federation,  
49 Leningradsky Avenue, Moscow, 125167, Russian Federation;  
Associate Professor,  
Department of Mathematical Modeling and Information Technologies  
Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia,  
6 Mikloubo-Maclay Street, Moscow, 117198, Russian Federation  
ORCID: 0000-0001-9763-9078  
DAV495@gmail.com*

### Abstract

The article focuses on modern methods of quantitative analysis of financial instruments based on the Markowitz portfolio theory, which allows designing optimal portfolios of financial instruments under the assumption of extreme rationality of investors and game theory, which allows taking into account the factor of player interaction between those participating in financial markets. The relevance of the research topic concerns the need to improve the quality of financial decisions made in conditions of increased volatility of financial markets. An initial set of financial instruments was built, consisting of fifty alterna-

tive options for placing funds. A preliminary analysis of the initial set of financial instruments allowed us to narrow it down to ten elements that are most preferable for placing funds. The classic Markowitz portfolio model, which assumes maximizing the expected return on a portfolio at a given level of risk, is complemented by auxiliary constraints that allow taking into account individual investor preferences. The presented six modifications of Markowitz portfolios help to identify the dynamics of the quantitative characteristics of portfolios depending on the individual preferences of investors. Expected profitability and expected risk, estimated from real financial data, are accepted as quantitative characteristics of portfolios. The game model is constructed in the form of a game with nature, which allows taking into account the complex nature of player interaction, which in most cases is not characterized by antagonism. The game model is designed to select the optimal net strategy of the investor, which takes into account various financial market conditions expressed by a market index (market portfolio). The study of the game model is implemented on the basis of the integrated Hodge-Lehman criterion regarding profitability and risk. Its use made it possible to take into account the individual level of investor confidence in the available financial information. In the process of practical implementation of these techniques, results were obtained that allow us to conclude about the degree of sensitivity of optimal investment strategies to individual preferences and perceptions of investors. The constructed models can be used to update the content of professional training of students in the higher economic school system, as well as to set up courses of additional professional education.

**Keywords:** portfolio theory, game theory, Hodge-Lehman criterion, Markowitz portfolio, individual investor preferences, quantitative analysis, financial solutions, optimal strategy.

#### Библиографическое описание для цитирования:

Власов Д.А. Количественный анализ финансовых инструментов на основе портфельной теории и теории игр // Идеи и идеалы. – 2024. – Т. 16, № 2, ч. 2. – С. 284–303. – DOI: 10.17212/2075-0862-2024-16.2.2-284-303.

Vlasov D. Quantitative Analysis of Financial Instruments Based on Portfolio Theory and Game Theory. *Idei i idealy = Ideas and Ideals*, 2024, vol. 16, iss. 2, pt. 2, pp. 284–303. DOI: 10.17212/2075-0862-2024-16.2.2-284-303.

#### Введение

В современных условиях повышенной волатильности финансовых рынков, неопределенности и актуализации рисков, угрожающих финансовой стабильности, актуальной проблемой является повышение качества принимаемых финансовых решений. Решение указанной проблемы лежит в плоскости осознанного и целесообразного применения количественных методов, разрабатываемых в рамках теории игр и теории принятия решений [9, 15], теории риска и теории полезности [13, 16], а также финансовой математики и портфельной теории [8, 17]. Для того чтобы понять, как

использовать математические методы портфельной теории и научиться использовать их осознанно, следует уточнить цели, которыми руководствуются инвесторы в процессе своей профессиональной деятельности. Под целями инвестирования принято понимать конечный результат, который требуется получить от вложения денежных средств.

Эффективность инвестирования определяется действиями, приемами и методами, применяя которые планируется получение конечного результата. Детально продуманный и научно обоснованный план способствует обретению финансовой стабильности и повышает эффективность использования имеющихся денежных средств. Необходимость формализации целей инвестирования приводит к выделению двух основных критериев, используемых для сравнения как финансовых инструментов, так и портфелей, из них составленных первым и позитивным критерием выступает доходность, вторым и негативным критерием выступает риск. Указанные классические критерии в процессе анализа финансовых инструментов могут быть дополнены другими критериями, например критерием ликвидности [6]. Различные аспекты применения математических инструментов в практике принятия финансовых решений неоднократно были в центре внимания исследователей. Так, в публикациях [7, 11] представлены наиболее актуальные вопросы конструирования и управления портфелем финансовых инструментов на основе количественных методов. В статьях [2, 12] акцентируется внимание на особенностях работы с цифровыми активами, доля которых на рынке финансовых инструментов возрастает. Потенциал линейного программирования и теории игр в анализе финансовых ситуаций раскрыт в публикации [18]. Новые направления развития портфельной теории и ее приложений описаны в статьях [19–21].

Практика анализа финансовых ситуаций свидетельствует о том, что положения классической портфельной теории, разработанной Марковицем, часто не соответствуют реальной финансовой действительности. Так, например, не все игроки на финансовых рынках характеризуются крайне рациональным поведением [1]. Современные условия требуют адаптации классической портфельной теории и рассмотрения альтернативных приемов анализа финансовых инструментов. Ранее в работах автора настоящей статьи была предложена методика комплексного использования количественных методов в финансовой сфере [4], рассмотрены основные игровые модели и методы их анализа [3]. В настоящей статье будут рассмотрены варианты модификаций портфеля, полученного на основе теории Марковица путем учета индивидуальных предпочтений инвестора. Кроме того, будет представлена игровая модель, позволяющая анализировать стратегии инвестирования с учетом динамики финансового рынка в целом и уровня доверия инвестора к имеющейся финансовой информации.

### Математические основы анализа финансовых инструментов

Раскроем математические основы анализа финансовых инструментов, востребованные в рамках портфельной теории. Задача нахождения оптимального портфеля (портфеля Марковица) с математической точки зрения представляет собой задачу нелинейного программирования (с линейной целевой функцией (1) и нелинейной системой ограничений (2) относительно тех же переменных):

$$\mu(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i \rightarrow \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i,j}^n x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \leq \sigma_0^2; \\ \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = 1; \\ x_i \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_i$  – ценовая доля финансового инструмента  $A_i$ ;  $\rho_{ij}$  – коэффициент корреляции доходностей финансовых инструментов  $A_i$  и  $A_j$ ;  $\sigma_i$  – среднее квадратичное отклонение доходности финансового инструмента  $A_i$ ;  $\sigma_0$  – уровень риска, предпочтительный для инвестора;  $\mu_i$  – ожидаемая доходность финансового инструмента  $A_i$ ;  $n$  – количество финансовых инструментов, используемых для конструирования портфеля Марковица.

Решением задачи (1), (2) является оптимальный портфель финансовых инструментов, ценовые доли которого удовлетворяют системе ограничений (2) и доставляют максимум целевой функции (1). Для нахождения оптимальных портфелей могут быть использованы различные методы, в частности метод обобщенного приведенного градиента [5].

Альтернативным приемом количественного анализа финансовых инструментов может выступать критерий Ходжа–Лемана [10]. Использование указанного критерия позволяет сгладить слабые стороны критерия Вальда и критерия Байеса, традиционно используемых для анализа игровых моделей. Привлечение критерия Ходжа–Лемана для анализа рассматриваемой финансовой ситуации позволяет учесть индивидуальные представления инвесторов. С этой целью до определения оптимального финансового инструмента для размещения денежных средств требуется введение параметра  $\lambda$ , определяющего *степень достоверности информации* о распределении вероятностей состояний природы  $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0)$ . Возможные значения этого параметра определены следующим условием:  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Увеличение значения параметра  $\alpha$  соответствует росту степени достоверности информации, по мнению инвестора.

Если степень достоверности информации, имеющейся в распоряжении инвестора, по его мнению, велика, в оценке эффективности альтернативных стратегий доминирует оценка, определяемая на основе *критерия Байеса*, в противном случае доминирует оценка эффективности, вычисляемая на основе *критерия Вальда*. Использование параметра доверия  $\alpha$  в данном критерии позволяет анализировать ситуацию принятия финансовых решений более тонко с позиции доверия АГПР к имеющейся информации, однако требует привлечения дополнительной информации. Кроме того, уровень доверия инвестора к имеющейся информации часто является субъективным фактором, который влияет на оптимальность принимаемых финансовых решений.

Показатель эффективности альтернатив – инвестиционных стратегий – определен формулой

$$HL_A(i) = \alpha B_{A, p^0}(i) + (1 - \alpha)W(i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

С учетом оценок показателей эффективности по критерию Байеса и критерию Вальда получаем, что

$$HL_A(i) = \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j^0 + (1 - \alpha) \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Вне зависимости от используемых значений параметра доверия  $\alpha$  имеет место двойное неравенство

$$W(i) \leq HL_A(i) \leq B_A(i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (5)$$

Оптимальной по критерию Ходжа–Лемана относительно матрицы выигрышей является стратегия, максимизирующая значение показателя эффективности:

$$HL_A = \max_{1 \leq i \leq m} HL_A(i) = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \alpha \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j^0 + (1 - \alpha) \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \right\}. \quad (6)$$

Однако применение критерия Ходжа–Лемана возможно не всегда. К условиям его применения относится наличие у инвестора информации о вероятностях состояний природы. Заметим, что, как правило, эта информация неокончательна или в основе этой информации незначительное число наблюдений. Для обоснованного применения критерия Ходжа–Лемана необходимо наличие бесконечного процесса выбора оптимальной инвестиционной стратегии, а малое количество реализации процесса выбора оптимальной инвестиционной стратегии приводит к некоторому риску, вызванному отклонением ожидаемых значений доходности от реальных.

Ранее рассмотрен критерий Ходжа–Лемана относительно матрицы выигрышей. Критерий Ходжа–Лемана относительно матрицы рисков основан на одновременном применении критерия Байеса и критерия Сэвиджа.

Показателем неэффективности стратегий игрока по критерию Ходжа–Лемана относительной матрицы рисков выступает величина, определяемая следующим образом:

$$HL_R(i) = \alpha B_{R, p^0}(i) + (1 - \alpha)S(i), \quad i = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Соотношения, традиционно используемые для расчета показателей неэффективности стратегий по критерию Байеса (относительно матрицы рисков) и критерию Сэвиджа, приводят к формуле

$$HL_R = \min_i HL_R(i) = \min_i \left\{ \alpha \sum_{j=1}^n r_{ij} p_j^0 + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} \right\}. \quad (8)$$

На уровне количественного анализа финансовых инструментов в настоящей статье будет показано, что критерии оптимальности стратегий Ходжа–Лемана относительно матрицы выигрышей и матрицы рисков не приводят к одной и той же оптимальной инвестиционной стратегии. Другими словами, эти критерии неэквивалентны.

### Реализация анализа финансовых инструментов на основе портфельной теории Марковица

Первым этапом реализации анализа финансовых инструментов на основе портфельной теории Марковица является оценка ожидаемых доходностей и рисков финансовых инструментов, отобранных для конструирования портфеля. Результаты оценки ожидаемых доходностей и рисков за 250 торговых дней представим в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

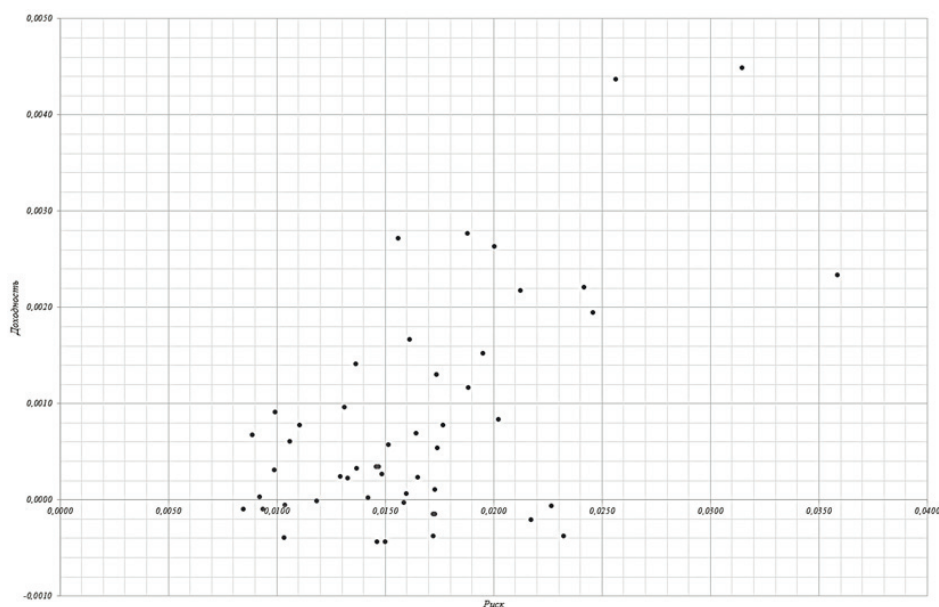
#### Риск и доходность финансовых инструментов\*

#### Risk and profitability of financial instruments

$A_i$	AAPL	AMZN	GOOGL	META	TSLA
$\sigma_i$	0,0136	0,0213	0,0195	0,0257	0,0359
$\mu_i$	0,0014	0,0022	0,0015	0,0044	0,0023
...	...	...	...	...	...
$A_i$	NVDA	NFLX	ORCL	MSFT	DIS
$\sigma_i$	0,0315	0,0246	0,0189	0,0161	0,0173
$\mu_i$	0,0045	0,0019	0,0012	0,0017	0,0001

\* Источник: результаты вычислений автора на основе данных финансовой платформы *investing.com*

В процессе исследования было проанализировано 50 финансовых инструментов, среди которых, например, AAPL – акции Apple Inc, DIS – акции Walt Disney Company.



Визуализация множества финансовых инструментов

Visualization of a variety of financial instruments

Отметим, что коэффициент корреляции предварительно оцененных доходностей и рисков составляет 0,5906, что в целом соответствует классической тенденции роста доходности при росте риска. Для построения портфелей из множества финансовых инструментов было выбрано десять альтернатив на основе метода линейной свертки двух критериев – *позитивного критерия (доходность)* и *негативного критерия (риск)*. В процессе построения портфелей финансовых инструментов была использована предварительно определенная ковариационная матрица, в рассматриваемом случае имеющая размерность  $10 \times 10$ . Заметим, что, как правило, увеличение количества финансовых инструментов в портфеле позволяет усилить его диверсификацию, однако, по имеющимся данным, сужение исходного множества финансовых инструментов до десяти привело к снижению выраженности корреляционной связи доходностей. В процессе анализа использованы приемы, представленные в публикации [14].

*Модификация 1.* Классический портфель Марковица. Классический портфель Марковица построим при условии максимизации доходности



портфеля, определяемой формулой (1) при условии допустимого уровня риска портфеля  $\sigma_0 = 0,05$ . Найденный портфель

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обеспечивает доходность  $\mu_1^* \approx 0,0009$  при риске  $\sigma_1^* \approx 0,0099$ .

*Модификация 2.* Максимизация доходности портфеля при условии равенства ценовых долей входящих в него финансовых инструментов.

В таком случае портфель имеет вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix},$$

его доходность  $\mu_2^* \approx 0,0003$  при риске  $\sigma_2^* \approx 0,0065$ .

*Модификация 3.* Портфель максимальной доходности при условии, что ценовая доля каждого финансового инструмента составляет не менее 0,05. В описанных условиях оптимальный портфель имеет вид

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,05 & 0,55 & 0,05 & 0,05 \\ 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,05 & 0,05 \end{pmatrix},$$

а его доходность  $\mu_3^* \approx 0,0006$  при риске  $\sigma_3^* \approx 0,0067$ .

*Модификация 4.* Портфель максимальной доходности при условии, что ценовая доля каждого финансового инструмента составляет не менее 0,01. Оптимальный портфель имеет вид

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,01 & 0,91 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

Доходность найденного портфеля  $\mu_4^* \approx 0,0008$  при риске  $\sigma_4^* \approx 0,0068$ .

*Модификация 5.* Максимизация доходности портфеля при условии, что ценовая доля каждого финансового инструмента, кроме третьего, составляет не менее 0,01, а ценовая доля третьего финансового инструмента – не более 0,5.

Искомый портфель имеет вид

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,01 & 0,5 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,42 & 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

Ему соответствует доходность  $\mu_5^* \approx 0,0008$  при риске  $\sigma_5^* \approx 0,0071$ .

*Модификация 6.* Максимизация доходности портфеля при условии, что ценовая доля каждого финансового инструмента не менее 0,01, а суммарная ценовая доля третьего и восьмого финансовых инструментов составляет не более 0,5.

Оптимальный портфель в соответствии с описанными условиями имеет вид

$$X_6 = \begin{pmatrix} 0,43 & 0,01 & 0,49 & 0,01 & 0,01 \\ 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 & 0,01 \end{pmatrix}.$$

Размещение в нем денежных средств характеризуется доходностью  $\mu_6^* \approx 0,0007$  при риске  $\sigma_6^* \approx 0,0077$ .

Динамика количественных характеристик портфелей в зависимости от модификаций, обусловленных индивидуальными предпочтениями инвестора, представлена в табл. 2.

Таблица 2

Table 2

**Динамика количественных характеристик портфелей в зависимости от модификаций**

**Dynamics of quantitative characteristics of portfolios depending on modifications**

Модификация	Суточная доходность портфеля	Суточный риск портфеля
1	0,0009	0,0099
2	0,0003	0,0065
3	0,0006	0,0067
4	0,0008	0,0068
5	0,0008	0,0071
6	0,0007	0,0077

Источник: расчеты автора.

**Реализация анализа финансовых инструментов на основе теории игр**

Рассмотрим задачу анализа финансовых инструментов в виде игровой модели, в рамках которой формализуется взаимодействие двух игроков: *инвестора* (активный игрок, осознанно принимающий решения о размещении денежных средств в финансовых инструментах) и *природы* (обобщенного игрока, выраженного рыночным индексом или рыночным портфелем). Для сведения задачи выбора оптимального финансового инструмента к задаче принятия решений в условиях частичной неопределенности требуется не только выделить возможные состояния рынка в целом, но и определить вероятности их реализации. Для простоты анализа рассмотрим три состояния природы, позволяющие, с одной стороны, не приве-

сти к существенному усложнению игровой модели и, с другой стороны, продемонстрировать реальную зависимость исходов игрового взаимодействия от них. Отметим, что число состояний рынка в целом может быть задано исследователем исходя из его личных предпочтений, однако должно быть не менее двух. Кроме того, в процессе построения игровой модели желательно не только количественно определить состояния, но и дать им содержательную интерпретацию.

Итак, *первое* состояние природы  $P_1 = (-\infty; -0,005]$  характеризуется относительно значительным падением рынка в целом; *второе* состояние  $P_2 = (-0,005; 0,005]$  характеризуется относительно незначительным падением или незначительным ростом рынка в целом; *третье* из рассматриваемых состояний  $P_3 = (0,005; +\infty)$  характеризуется относительно значительным ростом рынка в целом. Выбор именно трех состояний обусловлен желанием упростить анализ игровой модели, одновременно продемонстрировав возможности теоретико-игрового моделирования. Количественная оценка границ интервалов учитывает начальные данные.

Определим далее *вероятности реализации состояний природы*  $P_1, P_2$  и  $P_3$ . С этой целью воспользуемся классическим определением вероятности, подсчитав общее количество исходов, в рамках которых наступает случайное событие «Природа реализует состояние  $P_j$ ». Число таких исходов равно 250, так как для построения модели рассматриваются 250 торговых дней. В соответствии с данными, представленными в табл. 3, искомые вероятности реализации состояний природы равны  $p_1 = 0,24$ ;  $p_2 = 0,468$  и  $p_3 = 0,292$ . Обратим внимание, что случайные события  $P_1, P_2$  и  $P_3$  (табл. 3) образуют полную группу событий – совокупность единственно возможных событий, которые попарно несовместны – в процессе игры наступает одно и только одно из них. Множество стратегий инвестора будет по-прежнему ограничено десятью финансовыми инструментами, ранее используемыми в процессе конструирования различных модификаций портфелей.

Итак, в процессе исследования уточнено *множество игроков*, состоящее из первого игрока – инвестора, осознанно принимающего решения о выборе одного (чистая стратегия) или нескольких (смешанная стратегия, возможность случайного выбора стратегий в условиях многократного инвестирования) инструментов для инвестирования, а также множества стратегий каждого игрока (множество альтернативных финансовых инструментов и множество состояний рынка). Для окончательного построения игровой модели требуется определить платежную функцию, связывающую множества стратегий игроков с исходами игры (доходностью, получаемой инвестором).

Таблица 3

Table 3

**Состояния природы и их вероятности**  
**States of nature and their probabilities**

Состояния	П <sub>1</sub>	П <sub>2</sub>	П <sub>3</sub>
Содержательный смысл	$(-\infty; -0,005]$	$(-0,005; 0,005]$	$(0,005; +\infty)$
Количество наблюдений	60	117	73
Вероятности реализации состояний	0,2400	0,4680	0,2920

Источник: расчёты автора на основе данных финансовой платформы *investing.com*

Размерность игры, соответствующей рассматриваемой финансовой ситуации, равна  $10 \times 3$ , так как инвестор имеет десять чистых стратегий, а варианты действий природы ограничены тремя возможными состояниями. Таким образом, для задания игры следует определить 30 элементов, содержательный смысл которых заключается в полезности (выигрыше) игрока в случае, когда он сознательно выберет определенную стратегию, а природа реализует свое некоторое состояние. Например, если инвестор выберет свою первую стратегию, а природа реализует свое первое состояние, накопленная доходность, получаемая инвестором, будет представлять собой сумму доходностей первого инструмента, наблюдаемых исключительно при условии реализации природой своего первого состояния. Оценка накопленных доходностей по всем возможным исходам игры приводит к матрице игры (9):

$$A = \begin{pmatrix} 0,0678 & 0,0039 & 0,0957 \\ -0,0119 & -0,0290 & 0,0154 \\ 0,0937 & 0,0110 & 0,1226 \\ -0,0002 & 0,0347 & -0,0271 \\ -0,0390 & -0,0593 & 0,0737 \\ 0,1472 & -0,0390 & -0,0315 \\ 0,0528 & -0,0584 & 0,1559 \\ 0,1891 & -0,0700 & 0,0744 \\ 0,0087 & -0,0288 & 0,0050 \\ -0,1555 & 0,0494 & 0,0062 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матрица рисков, однозначно порожаемая матрицей игры (9), в таком случае имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 0,1214 & 0,0456 & 0,0603 \\ 0,2010 & 0,0784 & 0,1406 \\ 0,0955 & 0,0384 & 0,0333 \\ 0,1893 & 0,0147 & 0,1831 \\ 0,2282 & 0,1087 & 0,0822 \\ 0,0419 & 0,0885 & 0,1875 \\ 0,1363 & 0,1078 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,1194 & 0,0815 \\ 0,1805 & 0,0782 & 0,1510 \\ 0,3447 & 0,0000 & 0,1497 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

**Исследование игровой модели анализа финансовых инструментов.** Для определения оптимального варианта размещения денежных средств обратимся к построенной игровой модели, заданной матрицей выигрышей (9). Результат расчета показателей эффективности чистых стратегий  $A_1, A_2, \dots, A_{10}$  по формуле (4) представлен в табл. 4. Обратим внимание, что изменения уровня доверия инвестора к имеющейся информации существенно влияет на оптимальность стратегий. Оптимальной в соответствии с соотношением (6) признаётся та стратегия, которая обладает наибольшим показателем эффективности. Первый столбец табл. 4 ( $\alpha = 0$ ) содержит показатели эффективности, рассчитанные по критерию Вальда при условии полного недоверия инвестора к имеющейся информации. Последний столбец табл. 4 ( $\alpha = 1$ ) содержит показатели эффективности, рассчитанные по критерию Байеса относительно матрицы выигрышей при условии полного доверия инвестора к имеющейся информации.

Таблица 4

Table 4

**Показатели эффективности инвестиционных стратегий**

**Indicators of the effectiveness of investment strategies**

Стратегии	Уровень доверия к информации							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...	0,9	1
$A_1$	-0,0678	-0,0330	<b>0,0017</b>	<b>0,0364</b>	0,0711	...	0,2448	0,2795
$A_2$	-0,0290	-0,0277	-0,0263	-0,0250	-0,0236	...	-0,0169	-0,0156
$A_3$	-0,0937	-0,0866	-0,0795	-0,0724	-0,0654	...	-0,0300	-0,0229

Окончание табл. 4

End of the Tab. 4

Стратегии	Уровень доверия к информации							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...	0,9	1
$A_4$	-0,0271	<b>-0,0231</b>	-0,0190	-0,0150	-0,0110	...	0,0093	0,0133
$A_5$	-0,0593	-0,0560	-0,0528	-0,0495	-0,0463	...	-0,0300	-0,0267
$A_6$	-0,0390	-0,0343	-0,0296	-0,0249	-0,0202	...	0,0033	0,0080
$A_7$	-0,0584	-0,0512	-0,0440	-0,0369	-0,0297	...	0,0062	0,0133
$A_8$	-0,1891	-0,1152	-0,0413	0,0326	<b>0,1065</b>	...	0,4761	<b>0,5501</b>
$A_9$	-0,0288	-0,0272	-0,0256	-0,0240	-0,0223	...	-0,0143	-0,0126
$A_{10}$	-0,1555	-0,1355	-0,1154	-0,0953	-0,0752	...	0,0252	0,0452

Источник: расчеты автора.

Анализ матрицы рисков (10) на основе критерия Ходжа–Лемана, задаваемого формулой (7), позволяет каждой стратегии инвестора поставить в соответствие ее показатель неэффективности. Согласно (8), оптимальной стратегией по критерию Ходжа–Лемана относительной матрицы рисков признаётся стратегия, обладающая наименьшим показателем неэффективности. Первый столбец табл. 5 ( $\alpha = 0$ ) содержит показатели неэффективности, рассчитанные по критерию Севиджа при условии полного недоверия инвестора к имеющейся информации. Последний столбец табл. 4 ( $\alpha = 1$ ) содержит показатели неэффективности, рассчитанные по критерию Байеса относительно матрицы рисков при условии полного доверия инвестора к имеющейся информации.

Таблица 5

Table 5

**Показатели неэффективности инвестиционных стратегий**

**Indicators of the effectiveness of investment strategies**

Стратегии	Уровень доверия к информации							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...	0,9	1
$A_1$	0,4787	0,4661	0,4535	0,4409	0,4283	0,4157	0,4031	0,3905
$A_2$	0,8990	0,8738	0,8487	0,8236	0,7985	0,7734	0,7482	0,7231
$A_3$	0,8711	0,8495	0,8279	0,8063	0,7847	0,7631	0,7415	0,7199

Окончание табл. 5

End of the Tab. 5

Стра- тегии	Уровень доверия к информации							
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...	0,9	1
$A_4$	0,8352	0,8136	0,7920	0,7703	0,7487	0,7270	0,7054	0,6837
$A_5$	0,9293	0,9022	0,8752	0,8481	0,8211	0,7940	0,7670	0,7400
$A_6$	0,9090	0,8805	0,8520	0,8235	0,7951	0,7666	0,7381	0,7096
$A_7$	0,9283	0,8974	0,8664	0,8355	0,8045	0,7736	0,7426	0,7117
$A_8$	0,3364	0,3109	0,2855	0,2601	0,2346	0,2092	0,1838	0,1584
$A_9$	0,8988	0,8734	0,8480	0,8226	0,7972	0,7718	0,7464	0,7210
$A_{10}$	0,7205	0,7072	0,6938	0,6804	0,6671	0,6537	0,6403	0,6270

Источник: расчеты автора.

### Комментарии и выводы

Одним из направлений развития приемов принятия финансовых решений на основе применения математических инструментов (портфельная теория Марковица, игровое моделирование) является *учет индивидуальных предпочтений инвестора*. В рамках статьи получили развитие следующие варианты учета индивидуальных предпочтений инвестора: при конструировании портфелей Марковица и при обосновании выбора оптимальной инвестиционной стратегии на основе построенной игровой модели в двух вариантах представления (в виде матрицы игры, содержащей ожидаемые доходности инвестора, и в виде матрицы рисков, содержащей возможные риски с учетом всевозможных вариантов развития игрового взаимодействия).

Анализ количественных характеристик шести построенных портфелей Марковица, представленных в табл. 2, позволяет констатировать, что учет индивидуальных предпочтений инвестора, выраженных в форме ограничений на ценовые доли рассматриваемых финансовых инструментов, изменяет структуру оптимального портфеля. При этом наблюдается снижение ожидаемых значений доходности портфеля при одновременном снижении его риска. Заметим, что все построенные портфели можно рекомендовать для размещения денежных средств, однако вопрос об окончательном выборе портфеля лежит в плоскости уточнения индивидуальных предпочтений инвестора и применения методов теории принятия ре-

шений, в частности введения отношений строгого и нестрогого доминирования на множестве сконструированных портфелей.

Для построения игровой модели и представления ее в двух формах решены следующие задачи:

- построено множество чистых стратегий инвестора, выступающего игроком;
- построено множество возможных состояний рыночного индекса (рыночного портфеля);
- определены вероятности реализации каждого из выделенных ранее состояний природы;
- сконструирована матрица игры (9), элемент  $a_{ij}$  которой представляет собой накопленную инвестором доходность при условии, что им выбрана инвестиционная стратегия  $A_i$ , а природа реализует состояние  $\Pi_j$ ;
- найдена матрица рисков (10), однозначно порожаемая матрицей игры.

В процессе исследования построенной игровой модели использован критерий Ходжа–Лемана (как относительно доходности, так и относительно риска). Его применение позволило учесть индивидуальный уровень доверия инвестора к имеющейся финансовой информации. В процессе практической реализации указанных приемов получены результаты, позволяющие сделать вывод о степени чувствительности оптимальных стратегий инвестирования к индивидуальным предпочтениям инвестора. Так, при полном отсутствии доверия к имеющейся информации ( $\alpha = 0$ ) и при крайне низком уровне доверия ( $\alpha = 0,1$ ) оптимальной является стратегия  $A_4$ . Увеличение доверия инвестора к информации (низкий уровень,  $\alpha = 0,2$  и  $\alpha = 0,3$ ) приводит к тому, что стратегия  $A_1$  становится оптимальной. Дальнейший рост уровня доверия инвестора к информации обеспечивает оптимальность инвестиционной стратегии  $A_8$ . В частности, в условиях полного доверия инвестора к имеющейся информации  $A_8$  является оптимальной стратегией для размещения денежных средств. Таким образом, оптимальные стратегии, определяемые на основе анализа матрицы игры, обладают существенной чувствительностью к изменениям индивидуальных представлений инвестора.

Однако эта особенность не выявлена при анализе матрицы рисков: при любом значении показателя уровня доверия инвестора к информации оптимальной является стратегия  $A_8$ . Такой подход может быть использован в условиях, когда инвестор заинтересован не столько в максимизации ожидаемой доходности, сколько в снижении отклонений реальной получаемой доходности от максимально возможной.

В качестве перспектив исследования укажем разработку новых приемов реализации поведенческого подхода к конструированию и управлению портфелями финансовых инструментов, позволяющего учитывать степень и результат влияния различных факторов на выбор финансовых



стратегий и получаемые финансовые результаты. Определенный интерес в контексте исследования представляет также использование *теории временных рядов* (на основе статистического материала о значениях доходности и риска финансового инструмента) и *котул* (многомерных функций распределения, определенных особым образом) в конструировании портфелей, а также развитие *фрактального метода* анализа финансовых инструментов и конструирования портфелей, подразумевающего использование объектов, обладающих свойством самоподобия.

### Литература

1. *Богл Дж.* Руководство разумного инвестора: надежный способ получения прибыли на фондовом рынке. – М.: Альпина Паблишер, 2021. – 254 с.
2. *Ватолкина Н.Ш., Федоткина О.П., Феклин В.Г.* Цифровые финансовые активы: технологические возможности регулирования и контроля // Известия Дальневосточного федерального университета. Экономика и управление. – 2022. – № 3 (103). – С. 96–110. – DOI: 10.24866/2311-2271/2022-3/96-110.
3. *Власов Д.А.* Введение в теорию игр: учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2023. – 222 с.
4. *Власов Д.А.* Особенности комплексного использования количественных методов в финансовой сфере // Системные технологии. – 2020. – № 1 (34). – С. 133–139.
5. *Гисин В.Б., Путько Б.А.* Математика финансовых инструментов: модели и методы. – М.: Прометей, 2021. – 190 с.
6. *Горский М.А., Максимов Д.А.* Моделирование оптимального инвестиционного портфеля умеренно-агрессивного инвестора с дополнительным критерием ликвидности // Вестник Алтайской академии экономики и права. – 2022. – № 2-2. – С. 174–189. – DOI: 10.17513/vaael.2074.
7. Анализ инвестиционной портфельной теории / В.А. Иванюк, В.Г. Феклин, А.М. Сунчалин, А.Д. Цвиркун // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2022): труды Пятнадцатой международной конференции (26–28 сентября 2022 г., Москва, Россия). – М., 2022. – С. 660–664.
8. *Касимов Ю.Ф., Аль-Натор М.С., Колесников А.Н.* Основы финансовых вычислений. Портфели активов, оптимизация и хеджирование: учебное пособие. – М.: КноРус, 2022. – 322 с.
9. *Ревякин А.М., Терещенко А.М.* Принятие решений с помощью теории игр // Вестник Московской государственной академии делового администрирования. Серия: Экономика. – 2012. – № 4 (16). – С. 114–117.
10. *Сигал А.В.* Теория игр и ее экономические приложения: учебное пособие. – М.: Инфра-М, 2019. – 418 с. – DOI: 10.12737/textbook\_5b4462825d3c38.99437329.
11. *Синчуков А.В.* Общие вопросы конструирования и управления портфелем финансовых инструментов // Научные исследования и разработки. Экономика. – 2022. – Т. 10, № 1. – С. 36–43. – DOI: 10.12737/2587-9111-2022-10-1-36-43.

12. Технологические возможности контроля за оборотом цифровых финансовых активов / В.И. Соловьев, О.П. Федоткина, В.Г. Феклин, Д.И. Коровин // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Экономика и право. – 2022. – № 11. – С. 87–93.
13. Тихомиров Н.П., Тихомирова Т.М. Теория риска: учебное пособие. – М.: Юнити-Дана, 2020. – 308 с.
14. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: учебное пособие / пер. с англ. под ред. М.Р. Ефимовой. – М.: Финансы: Юнити, 1999. – 527 с.
15. Фенченко К.В. К вопросу о применении теории игр в анализе финансовых рынков // Вестник Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова. Вступление. Путь в науку. – 2015. – № 1–2 (11). – С. 108–114.
16. Формирование индикаторов, критериев, мер и шкал оценки рисков / Г.П. Фомин, И.В. Сухорукова, Д.А. Максимов, И.Ф. Алешина // Мягкие измерения и вычисления. – 2022. – Т. 52, № 3. – С. 5–10.
17. Хуторова Н.А., Назин Н.А. Анализ эффективности портфельных стратегий, основанных на концепции дивидендной доходности на примере российского фондового рынка // Финансовая аналитика: проблемы и решения. – 2021. – Т. 14, № 3 (357). – С. 323–346.
18. Liu J. Modern Portfolio Theory and Its Applications // Finance & Economics. – 2024. – Vol. 1 (5). – DOI: 10.61173/jcmw2r53.
19. Liu Y. Modern Portfolio Theory: analysis and implication // Advances in Economics, Management and Political Sciences. – 2023. – Vol. 4. – P. 158–164. – DOI: 10.54254/2754-1169/4/20221048.
20. Olofinlade S., Joshua D. Application of Linear Programming to Game Theory in Finance // Turk Turizm Arastirmalari Dergisi. – 2022. – DOI: 10.26677/TR1010.2022.1124.
21. Yin H. Portfolio Construction Based on Mean Variance Portfolio Theory // BCP Business & Management. – 2023. – Vol. 38. – P. 3443–3448. – DOI: 10.54691/bcpbm.v38i.4325.

## References

1. Bogle J. *Rukovodstvo razumnogo investora: nadezhnyi sposob polucheniya pribyli na fondovom rynke* [Little book of common sense investing: the only way to guarantee your fair share of market returns]. Moscow, Al'pina Publisher, 2021. 254 p. (In Russian).
2. Vatolkina N.Sh., Fedotkina O.P., Feklin V.G. Tsifrovye finansovye aktivy: tekhnologicheskie vozmozhnosti regulirovaniya i kontrolya [Digital financial assets: technological possibilities of regulation and control]. *Izvestiya Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta. Ekonomika i upravlenie = Bulletin of the Far Eastern Federal University. Economics and Management*, 2022, no. 3 (103), pp. 96–110. DOI: 10.24866/2311-2271/2022-3/96-110.
3. Vlasov D.A. *Vvedenie v teoriyu igr* [Introduction to game theory]. Moscow, Infra-M Publ., 2023. 222 p.

4. Vlasov D.A. Osobennosti kompleksnogo ispol'zovaniya kolichestvennykh metodov v finansovoi sfere [Features of the integrated use of quantitative methods in the financial sector]. *Sistemnye tekhnologii = System Technologies*, 2020, no. 1 (34), pp. 133–139.
5. Gisin V.B., Putko B.A. *Matematika finansovykh instrumentov: modeli i metody* [Mathematics automated tools: models and methods]. Moscow, Prometei Publ., 2021. 190 p.
6. Gorskiy M.A., Maksimov D.A. Modelirovanie optimal'nogo investitsionnogo portfelya umerenno-agressivnogo investora s dopolnitel'nym kriteriem likvidnosti [Modeling of the optimum investment portfolio of a moderate-aggressive investor with an additional liquidity criterion]. *Vestnik Altaiskoi akademii ekonomiki i prava = Journal of Altai Academy of Economics and Law*, 2022, no. 2-2, pp. 174–189. DOI: 10.17513/vael.2074.
7. Ivanyuk V.A., Feklin V.G., Sunchalin A.M., Tsvirkun A.D. [Analysis of investment portfolio theory]. *Upravlenie razvitiem krupnomasshtabnykh sistem (MLSD'2022)* [Managing the development of large-scale systems (MLSD'2022)]. Proceedings of the Fifteenth International Conference, Moscow, 2022, pp. 660–664. (In Russian).
8. Kasimov Yu.F., AP-Nator M.S., Kolesnikov A.N. *Osnovy finansovykh vychislenii. Portfeli aktivov, optimizatsiya i kbedzhirovanie* [Fundamentals of financial computing. Asset portfolios, optimization and hedging]. Moscow, KnoRus Publ., 2022. 322 p.
9. Revyakin A.M., Tereshchenko A.M. Prinyatie reshenii s pomoshch'yu teorii igr [Decision-making using game theory]. *Vestnik Moskovskoi gosudarstvennoi akademii delovogo administrirovaniya. Seriya: Ekonomika = MCU Journal of Economic Studies*, 2012, no. 4 (16), pp. 114–117.
10. Sigal A.V. *Teoriya igr i ee ekonomicheskie prilozheniya* [Game theory and its economic applications]. Moscow, Infra-M Publ., 2019. 418 p. DOI: 10.12737/textbook\_5b4462825d3c38.99437329.
11. Sinchukov A.V. Obshchie voprosy konstruirovaniya i upravleniya portfelem finansovykh instrumentov [General issues of designing and managing a portfolio of financial instruments]. *Nauchnye issledovaniya i razrabotki. Ekonomika = Scientific Research and Development. Economics*, 2022, vol. 10, no. 1, pp. 36–43. DOI: 10.12737/2587-9111-2022-10-1-36-43.
12. Solov'ev V.I., Fedotkina O.P., Feklin V.G., Korovin D.I. Tekhnologicheskie vozmozhnosti kontrolya za oborotom tsifrovyykh finansovykh aktivov [Technological capabilities of monitoring the equipment of digital financial assets]. *Sovremennaya nauka: aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Ekonomika i pravo = Modern science: actual problems of theory and practice. Series: Economics and Law*, 2022, no. 11, pp. 87–93.
13. Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M. *Teoriya riska* [Theory of risk]. Moscow, Unity-Dana Publ., 2020. 308 p.
14. Watsham T.J., Parramore K. *Quantitative Methods in Finance*. International Thomson Business Press, 1996 (Russ. ed.: Uotshem T.Dzh., Parramou K. *Kolichestvennye metody v finansakh*. Moscow, Finansy Publ., Unity Publ., 1999. 527 p.).
15. Fenchenko K.V. K voprosu o primenenii teorii igr v analize finansovykh rynkov [On the question of the application of game theory in the analysis of financial markets]. *Vestnik Rossiiskogo ekonomicheskogo universiteta im. G.V. Plekhanova. Vstuplenie. Put' v nauku =*

*Vestnik of the Plekhanov Russian university of economics. Introduction. The road to science*, 2015, no. 1–2 (11), pp. 108–114.

16. Fomin G.P., Sukhorukova I.V., Maksimov D.A., Aleshina I.F. Formirovaniye indikatorov, kriteriev, mer i shkal otsenki riskov [Formation of indicators, criteria, measures and risk assessment scales]. *Myagkie izmereniya i vychisleniya = Soft Measurement and Computing*, 2022, vol. 52, no. 3, pp. 5–10.

17. Khutorova N.A., Nazin N.A. Analiz effektivnosti portfel'nykh strategii, osnovannykh na kontseptsii dividendnoi dokhodnosti na primere rossiiskogo fondovogo rynka [Analyzing the efficiency of portfolio strategies based on the dividend yield concept: Evidence from the Russian stock market]. *Finansovaya analitika: problemy i resheniya = Financial Analytics: Science and Experience*, 2021, vol. 14, no. 3 (357), pp. 323–346.

18. Liu J. Modern Portfolio Theory and Its Applications. *Finance & Economics*, 2024, vol. 1 (5). DOI: 10.61173/jcmw2r53.

19. Liu Y. Modern Portfolio Theory: analysis and implication. *Advances in Economics, Management and Political Sciences*, 2023, vol. 4, pp. 158–164. DOI: 10.54254/2754-1169/4/20221048.

20. Olofinlade S., Joshua D. Application of Linear Programming to Game Theory in Finance. *Turk Turizm Arastirmalari Dergisi*, 2022. DOI: 10.26677/TR1010.2022.1124.

21. Yin H. Portfolio Construction Based on Mean Variance Portfolio Theory. *BCP Business & Management*, 2023, vol. 38, pp. 3443–3448. DOI: 10.54691/bcpbm.v38i.4325.

Статья поступила в редакцию 20.01.2024.

Статья прошла рецензирование 24.02.2024.

The article was received on 20.01.2024.

The article was reviewed on 24.02.2024.